



Capítulo 3:

Gráficos de Funções Racionais

▼ Introdução

Uma função racional é a razão (ou quociente) entre dois polinômios. A função racional é indefinida quando possui o valor zero no denominador. Tal zero não se encontra no domínio das funções racionais.

Quando o denominador da função racional possui um zero real, pode ou não haver uma assíntota vertical. Se o numerador não desaparece (torna-se zero) neste ponto, então há uma assíntota vertical. Se o numerador não se torna zero neste ponto, então o comportamento da função pode ser determinado, fatorando-se ambos, o numerador e o denominador, em seus fatores lineares e reduzindo a expressão a termos de menor ordem. O desaparecimento ou não do numerador da fração fatorada e simplificada determina se existe ou não uma assíntota vertical.

Assim como acontece com os polinômios, os zeros reais do numerador que não são zeros do denominador são interseções em x no gráfico da função racional.

Funções racionais também podem ter assíntotas horizontais, ou seja, linhas horizontais para onde tende a função à medida que $|x|$ torna-se arbitrariamente grande.

Funções racionais podem possuir até mesmo assíntotas oblíquas (inclinadas), ou seja, linhas inclinadas para onde tende a função à medida que $|x|$ torna-se arbitrariamente grande.

Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

[assíntota](#)

[divisor](#)

[domínio](#)

[par](#)

[hipérbole](#)

[infinito](#)

[intercepta](#)

[limite](#)

[negativo](#)

[ímpar](#)

[polinômio](#)

[positivo](#)

[quociente](#)

[razão](#)

[função racional](#)

[número real](#)

[recíproco](#)

[resto](#)

Problemas Típicos

Para as [funções racionais](#) dadas nos problemas 1 - 11, esboçar um gráfico e determinar as equações de todas as [assíntotas](#), horizontal, vertical e oblíqua. Além disso, determinar as [interseções](#) em x e y .

3.1. $f(x) = \frac{1}{x}$

3.2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3.3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

3.4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

3.5. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

3.6. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

3.7. $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x + 1)(x - 2)}$

3.8. $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$

3.9.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

$$3.10. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$$

$$3.11. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

▼ Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

▼ Soluções

▼ Problema 3.1

▼ 3.1 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{1}{x}$ não possui interseção em y , pois $f(0)$ é indefinida. Além disso, não possui interseção em x porque a equação $f(x) = \frac{1}{x} = 0$ não possui solução.

Próximo de $x = 0$ e com $x > 0$, os valores de $f(x)$ são grandes e positivos. Próximo de $x = 0$ e com $x < 0$, os valores de $f(x)$ são grandes em magnitude, porém negativos. Estas duas observações são expressas matematicamente por meio da notação

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

respectivamente.

Conseqüentemente, o eixo y é uma assíntota vertical.

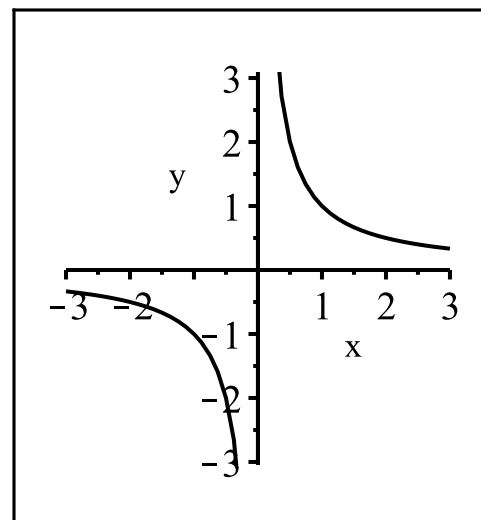


Figura 3.1.1 Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$

Para x grande e positivo, $f(x)$ é positiva, embora muito próxima de zero. Para x negativo e grande em valor absoluto, $f(x)$ é negativa, embora também muito próxima de zero. Estas duas observações são expressas matematicamente por meio da notação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Consequentemente, o eixo x é uma assíntota horizontal.

Um gráfico feito no Maple desta função é a [hipérbole](#) mostrada na Figura 3.1.1.

3.1 - Solução via Maplet

Um gráfico da [função racional](#)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

e as equações de qualquer uma de suas [assíntotas](#) podem ser obtidos por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.1.2.

As [interseções](#) podem ser inferidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

As assíntotas que coincidem com um eixo são traçadas com uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além da possibilidade de modificar o gráfico, os botões para as assíntotas fornecem as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico desta função que não há interseções.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial](#)

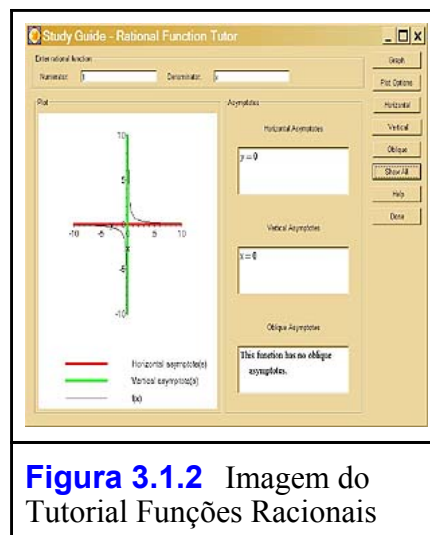


Figura 3.1.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

▼ 3.1 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

▼ Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

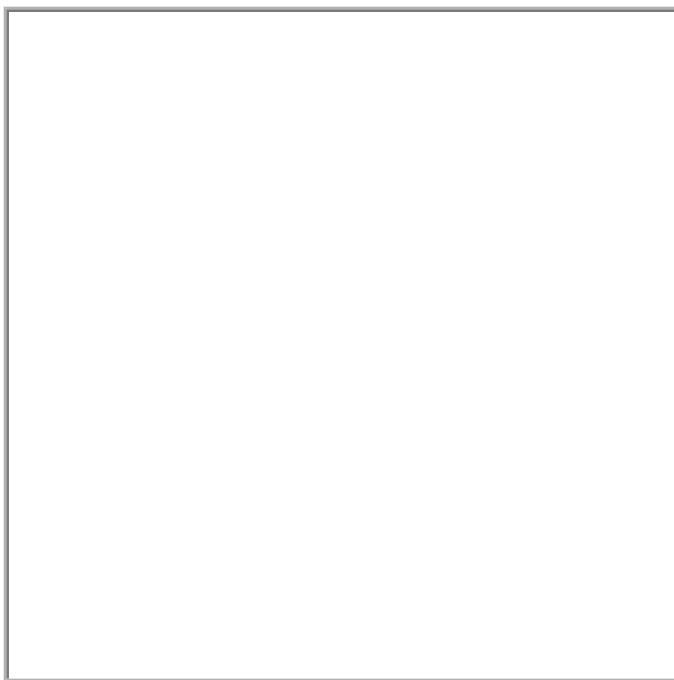
Forma de Pon...

Oblíqua

Forma Ponto ...

Vertical

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico



Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito

- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
 Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
 Descontinuidades

Imagem:

Encontrar

3.1 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional:

$$> f := \frac{1}{x}$$

aparece na Figura 3.1.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-5..5, y=-5..5)`

O gráfico de f não cruza nem com o eixo y e nem com o eixo x . Portanto, não há interseções. A reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada ao se formular (e responder) a questão

"De que valor finito a função f aproxima-se à medida que x move-se para a direita ou esquerda do eixo numérico?"

A forma matemática exata de se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = - ∞)`

É possível que f possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

A reta vertical $x = 0$ é a assíntota vertical. Uma assíntota vertical pode ocorrer em pontos onde o denominador de f torna-se zero, enquanto o numerador é diferente de zero.

À medida em que x aproxima-se de zero através de números positivos pequenos, f , o recíproco destes números positivos pequenos, retorna números positivos grandes. Portanto, à medida que x aproxima-se de zero pela direita, f tende a valores positivos grandes, um fenômeno que descreveremos por " ∞ ", o símbolo de infinito.

Alternativamente, à medida em que x aproxima-se de zero através de números negativos de baixo valor absoluto, f , o recíproco destes números negativos, retorna números negativos de alto valor absoluto. Portanto, à medida em que x aproxima-se de zero pela esquerda, f tende a números negativos de alto valor absoluto, um fenômeno que descreveremos por " $-\infty$ ", o símbolo de menos infinito.

Novamente, a linguagem matemática formal para uma análise de tal comportamento é através do conceito de *limite*, implementado no Maple como

> $\text{Limit}(f, x=0, \text{right}) = \text{limit}(f, x=0, \text{right});$
 $\text{Limit}(f, x=0, \text{left}) = \text{limit}(f, x=0, \text{left})$

onde a notação indica que a aproximação em $x = 0$ é feita pela direita, como no primeiro cálculo, ou pela esquerda, como no segundo cálculo.

Problema 3.2

3.2 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não possui interseção em y , pois $f(0)$ é indefinida. Além disso, não possui interseção em x , uma vez que a equação $f(x) = \frac{1}{x^2} = 0$ não possui solução.

Próximo de $x = 0$, para $x > 0$ e $x < 0$, os valores de $f(x)$ são grandes e positivos. Estas duas observações são expressas matematicamente pela notação

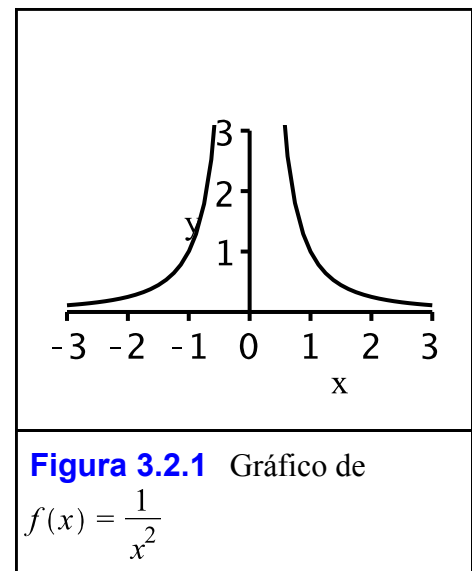
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$$

respectivamente. Conseqüentemente, o eixo y é uma assíntota vertical.

Para x grande em valor absoluto, $f(x)$ é positivo e próximo de zero. Esta observação é expressa matematicamente pela notação



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Conseqüentemente, o eixo x é uma assíntota horizontal.

O gráfico desta função, obtido pelo Maple, é mostrado na Figura 3.2.1.

▼ 3.2 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.2.2.

As interseções podem ser inferidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

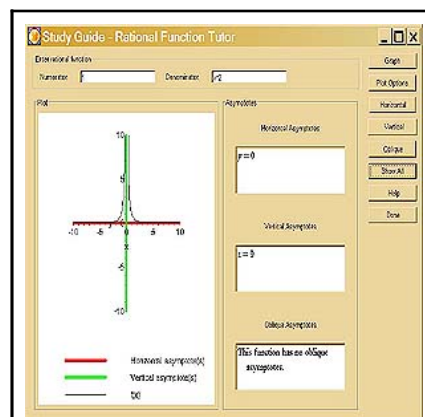


Figura 3.2.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

As assíntotas que coincidem com um eixo são traçadas com uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além da possibilidade de modificar o gráfico, os botões para as assíntotas fornecem as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico desta função que não há interseções.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).



3.2 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome f

Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Gráfico

Assíntotas

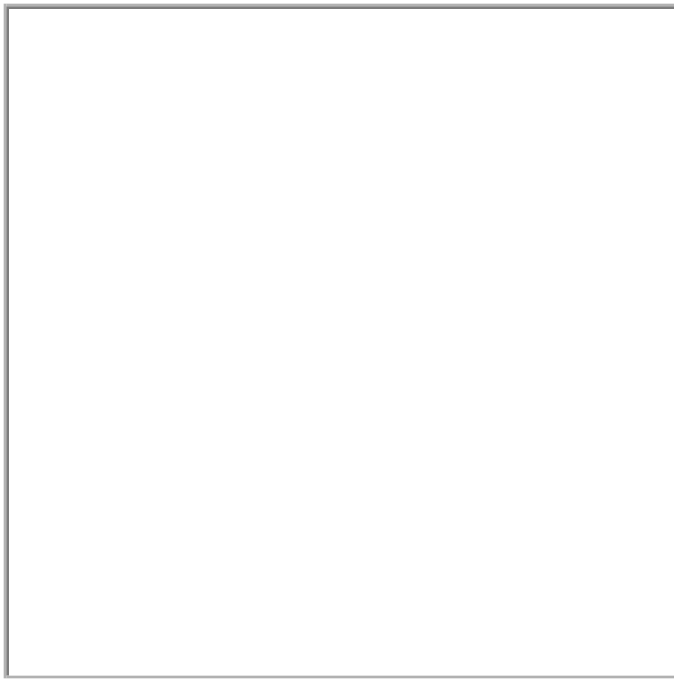
Horizontal

Forma de Pon...

Oblíqua

Forma Ponto ...

Vertical



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico



Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito

- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
Descontinuidades

Imagem:

Encontrar

3.2 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional:

$$> f := \frac{1}{x^2}$$

é mostrado na figura 3.2.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-5..5, y=-1..4)`

O gráfico de $f(x)$ não cruza nem com o eixo y e nem com o eixo x . Portanto, não há interseções.

A reta horizontal $y = 0$ é um assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo) a questão

"Para que valor finito $f(x)$ aproxima-se de x à medida em que move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata de se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por :

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = - ∞)`

É possível que f possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

A reta vertical $x = 0$ é a assíntota vertical. Uma assíntota vertical pode ocorrer em pontos onde o denominador de f torna-se zero, enquanto o numerador é diferente de zero.

À medida em que x aproxima-se de zero através de números positivos pequenos, f , o recíproco destes números positivos pequenos, retorna números positivos grandes. Portanto, à medida que x aproxima-se de zero pela direita, f tende a valores positivos grandes, um fenômeno que descreveremos por " ∞ ", o símbolo de **infinito**.

Alternativamente, à medida em que x aproxima-se de zero através de números negativos de baixo valor absoluto, f , o recíproco destes números negativos, retorna números negativos de alto valor absoluto. Portanto, à medida em que x aproxima-se de zero pela esquerda, f tende a números negativos de alto valor absoluto, um fenômeno que descreveremos por " $-\infty$ ", o símbolo de menos infinito.

Novamente, a linguagem matemática formal para uma análise de tal comportamento é através do conceito de *limite*, implementado no Maple como:

> $\text{Limit}(f, x = 0, \text{right}) = \text{limit}(f, x = 0, \text{right});$
 $\text{Limit}(f, x = 0, \text{left}) = \text{limit}(f, x = 0, \text{left})$

onde a notação indica que a aproximação em $x = 0$ é feita pela direita, como no primeiro cálculo, ou pela esquerda, como no segundo cálculo.

Problema 3.3

3.3 - Solução Matemática

A **função racional** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ apresenta o valor 1 como **interseção** em y , pois $f(0) = 1$. Além disso, não possui interseção em x , uma vez que a equação $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ não possui solução.

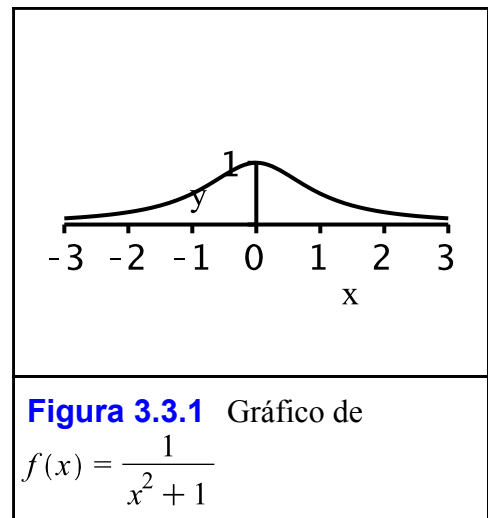
O denominador de $f(x)$, ou seja, $x^2 + 1$, nunca se iguala a zero para nenhum x . Portanto, não existe **assíntota** vertical.

Para x grande em valor absoluto, $f(x)$ é positiva e próxima de zero. Esta observação é expressa matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



Conseqüentemente, o eixo x é uma assíntota horizontal.

O gráfico desta função é mostrado na Figura 3.3.1.

▼ 3.3 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.3.2.

As interseções podem ser inferidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

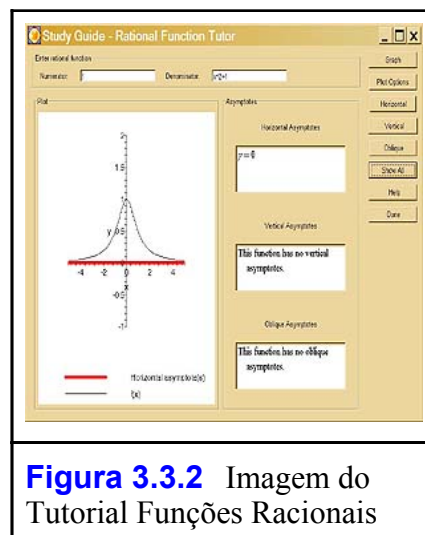


Figura 3.3.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

As assíntotas que coincidem com um eixo são traçadas com uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além da possibilidade de modificar o gráfico, os botões para as assíntotas fornecem as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico desta função que há apenas uma interseção em y . Como ocorre em $x = 0$, esta é dada por $f(0) = 1$.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

▼ 3.3 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

Gráfico

Tutor Função Racional

Obliqua

Forma Ponto ...

Vertical

Limpar Gráfico

Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > $x > \infty$
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > $x > -\infty$
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:

$$-1 \leq y \leq 1$$

Descontinuidades

Imagem:

Encontrar

3.3 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

$$> f := \frac{1}{x^2 + 1}$$

aparece na Figura 3.3.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x = -3 .. 3, y = 0 .. 1, scaling = constrained, tickmarks = [7, 2])`

O gráfico de $f(x)$ cruza o eixo y mas não o eixo x . Desta forma, há apenas uma interseção em y , encontrada pelo cálculo a seguir:

> `eval(f, x = 0)`

A reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Esta é encontrada formulando-se e (respondendo-se) à questão:

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por:

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = -∞)`

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

O denominador, ou seja:

> `d := denom(f)`

nunca é igual a zero, como se observa no gráfico da Figura 3.3.3.

> `plot(d, x = -2 .. 2, -1 .. 5)`

Figura 3.3.3 Gráfico do denominador de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Portanto, $f(x)$ não possui assíntota vertical, uma vez que as assíntotas verticais podem ocorrer apenas em pontos onde o denominador é zero quando o numerador é diferente de zero.

Problema 3.4

3.4 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ possui 0 como sua interseção em y , pois $f(0) = 0$. Esta possui 0 como interseção em x porque a equação $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ possui a solução $x = 0$. Conseqüentemente, o gráfico de $f(x)$ passa pela origem.

Como $f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$, a função possui simetria ímpar, assim como a função $\sin(x)$.

O denominador, ou seja, $x^2 + 1$, nunca é igual a zero para nenhum x real. Portanto, não há assíntota vertical.

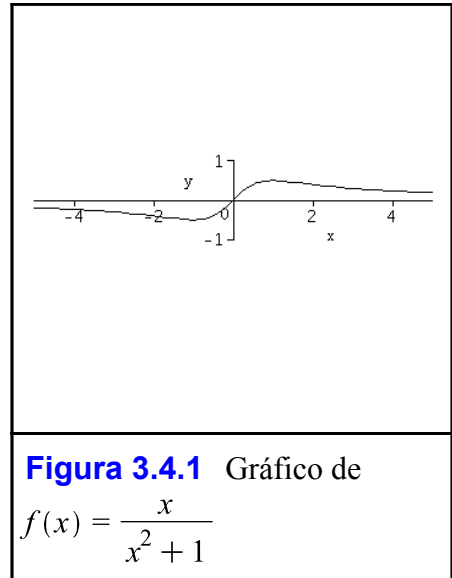


Figura 3.4.1 Gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Para x grande e positivo, $f(x)$ é positiva e próxima de zero. Para x negativo e grande em valor absoluto, $f(x)$ é negativa e próxima de zero. Estas duas observações são expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Conseqüentemente, o eixo x é uma assíntota horizontal.

A Tabela 3.4.1 nos proporciona uma lista de valores que podem auxiliar a gerar o esboço de $f(x)$ se não pudermos usar um software no momento. A Figura 3.4.1 é um gráfico gerado pelo Maple da função.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$f(x)$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{10}{29}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{53}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{18}{85}$	$\frac{5}{26}$
$f(x)$	0	0.40	0.50	0.46	0.40	0.34	0.30	0.26	0.24	0.21	0.19

3.4 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.4.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas com uma linha mais forte para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico que esta função passa pela origem. Portanto, as interseções em x e y são $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Para iniciar o **Tutorial de Funções Racionais**, deve-se clicar no link a seguir: [Tutorial Função Racional](#).

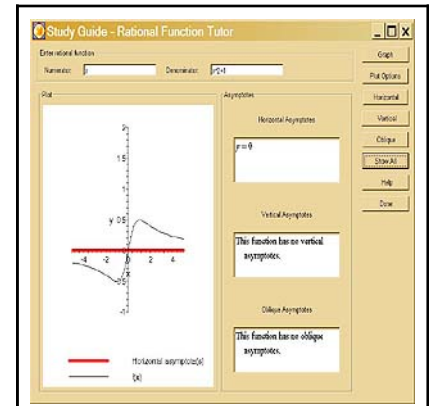


Figura 3.4.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

3.4 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

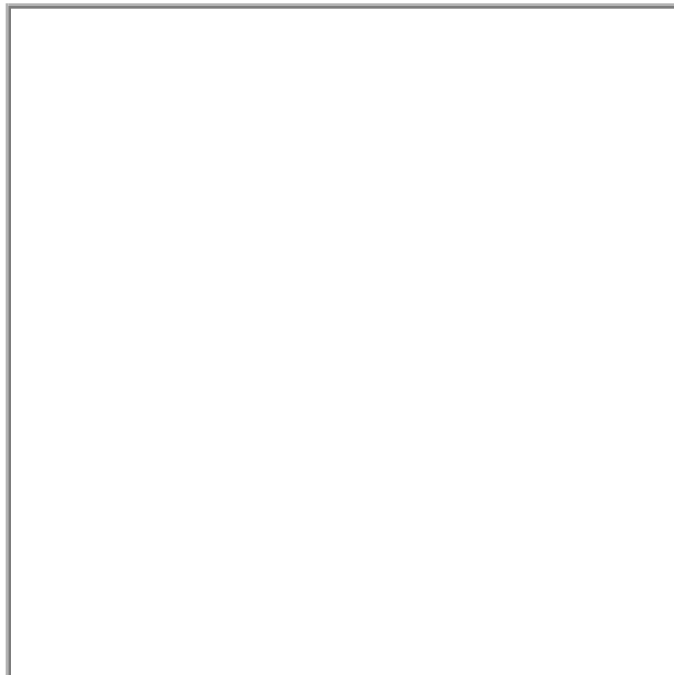
Obliqua

Forma Ponto ...

Vertical

Forma Ponto ...

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Assíntotas

Assíntotas Verticais	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Denominador • Menu de Contexto: Resolver	
Assíntotas Horizontais	
Comportamento para $x \rightarrow \infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	
Comportamento para $x \rightarrow -\infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > -infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	

Gráfico

• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-1 \leq x \leq 1$ Opções: $-1 \leq y \leq 1$ Descontinuidades	Imagem: Encontrar
---	---------------------------------

3.4 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

> $f := \frac{x}{x^2 + 1}$

aparece na Figura 3.4.1. Pode ser criado com o comando:

```
> plot(f, x=-5..5, y=-.5..0.5)
```

O gráfico de $f(x)$ parece passar pela origem, uma hipótese que pode ser verificada pelos cálculos:

```
> eval(f, x=0)
```

Portanto, a origem é tanto a interseção em x quanto a interseção em y .

A reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se e (respondendo-se) a questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por

```
> y = limit(f, x = ∞);  
y = limit(f, x = - ∞)
```

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

O denominador, ou seja,

```
> d := denom(f)
```

nunca é igual a zero, como se observa no gráfico da Figura 3.4.3.

```
> plot(d, x=-2..2, -1..5)
```

Figura 3.4.3 Gráfico do denominador de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Portanto, $f(x)$ não possui assíntota vertical, uma vez que estas podem ocorrer apenas nos pontos onde o denominador é zero e o numerador diferente de zero.

▼ Problema 3.5

▼ 3.5 - Solução Matemática

A **função racional** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ possui 0 como sua **interseção** em y, pois $f(0) = 0$. Esta também possui 0 como interseção em x, pois a equação $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = 0$ possui solução $x = 0$. Conseqüentemente, o gráfico de $f(x)$ passa pela origem.

Como $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$, a função apresenta simetria **par**, assim como a função $\cos(x)$.

O denominador, ou seja, $x^2 + 1$, nunca é igual a zero para nenhum x real. Portanto, não há **assíntota** vertical.

Para x grande em valor absoluto, $f(x)$ encontra-se próxima de 1, permanecendo ainda menor que 1. Esta observação é expressa matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

e

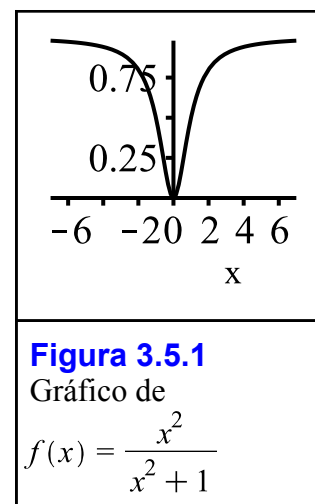
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Conseqüentemente, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

A Tabela 3.5.1 nos proporciona uma lista de valores que podem auxiliar a gerar o esboço de $f(x)$ se não pudermos usar um software no momento. A Figura 3.5.1 é um gráfico gerado pelo Maple da função.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
f(x)	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{29}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{49}{53}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{81}{85}$	$\frac{25}{26}$
f(x)	0	0.20	0.50	0.69	0.80	0.86	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96

Tabela 3.5.1 Valores de $f(x)$



3.5 - Solução via Maplet

Um gráfico da **função racional**

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$



e as equações de quaisquer de suas **assíntotas** podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.5.2.

As **interseções** podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas com uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações para as respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico da função que esta passa pela origem. Portanto, as interseções em x e y são $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Para iniciar o **Tutorial de Funções Racionais**, deve-se clicar no link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

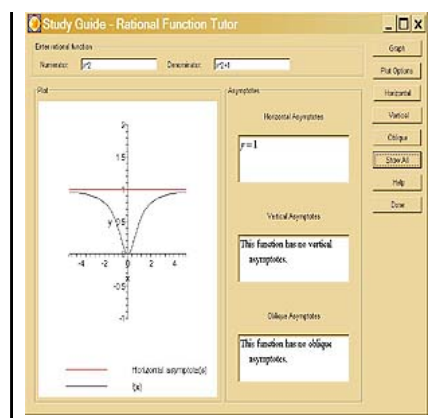


Figura 3.5.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

3.5 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome > f

Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

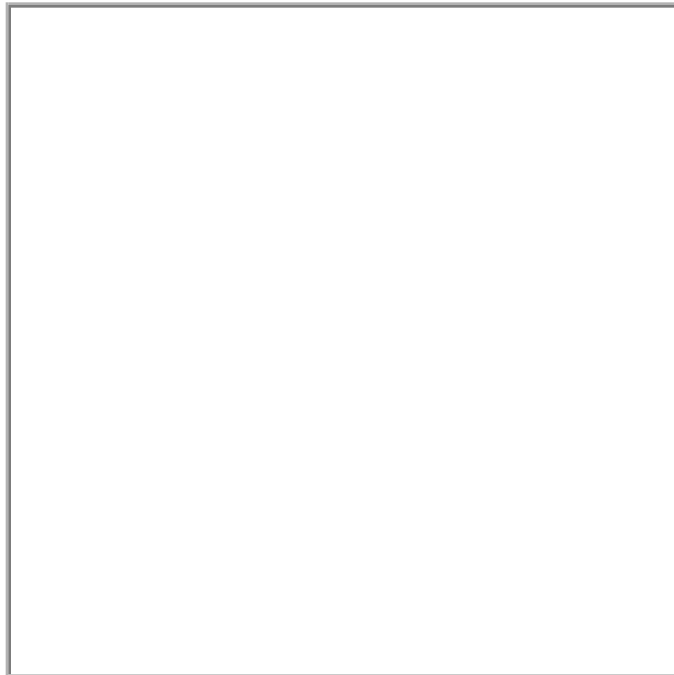
Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

Oblíqua

Forma Ponto ...

Vertical

Forma Ponto ...

Assíntotas Verticais	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Denominador • Menu de Contexto: Resolver	
Assíntotas Horizontais	
Comportamento para $x \rightarrow \infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	
Comportamento para $x \rightarrow -\infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > -infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	
Gráfico	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-1 \leq x \leq 1$ Opções: $-1 \leq y \leq 1$ Descontinuidades Imagem: Encontrar	

3.5 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

$$> f := \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

aparece na Figura 3.5.2. Pode ser criado com o comando:

```
> plot(f, x=-7..7, y=0..1, tickmarks=[7, 4])
```

O gráfico de $f(x)$ parece passar pela origem, uma hipótese que pode ser verificada pelos

cálculos.

> `eval(f, x = 0)`

Portanto, a origem é tanto a interseção em x como a interseção em y .

A reta horizontal $y = 1$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por:

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = - ∞)`

Alternativamente, reescreva $f(x)$ como:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

por meio da divisão longa, implementada no Maple pelo comando quo, como segue.

> `quotient = quo(numer(f), denom(f), x, 'r');`
`remainder = r`

O quociente de x^2 dividido por $x^2 + 1$, ou seja, 1, é retornado diretamente pelo comando quo.

O resto obtido ao executar-se a divisão é armazenado na variável r que, neste caso, é -1.

Como o resto deve ser dividido pelo divisor, segue o resultado.

Como vimos que no Problema 3 que $\frac{1}{x^2 + 1}$ tende a zero tanto para x grande quanto para

pequeno, o quociente 1 indica a assíntota horizontal.

Por fim, note que é possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e uma outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal em ambas as extremidades.

O denominador, ou seja,

> `d := denom(f)`

nunca é zero, como se pode observar no gráfico na Figura 3.5.3.

> `plot(d, x=-2..2, -1..5)`

Figura 3.5.3 Gráfico do denominador

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Portanto, $f(x)$ não possui assíntota vertical, uma vez que estas só podem ocorrer em pontos onde o denominador é zero e o numerador diferente de zero.

Problema 3.6

3.6 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ possui -1 como

sua interseção em y , pois $f(0) = -1$. Esta possui $x = +1$ como interseções em x , pois a equação

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \text{ possui as soluções } x = -1 \text{ e } 1.$$

Como $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$, a

função apresenta simetria par, assim como a função $\cos(x)$.

O denominador, ou seja, $x^2 + 1$, não é igual a zero para nenhum número real x . Portanto, não há assíntota vertical.

Para x grande em valor absoluto, $f(x)$ encontra-se próxima de 1, mas ainda permanece menor que 1. Esta observação é expressa matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Conseqüentemente, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

A Tabela 3.6.1 nos proporciona uma lista de valores que podem auxiliar a gerar o esboço de $f(x)$ se não pudermos usar um software no momento. A Figura 3.6.1 é um gráfico gerado

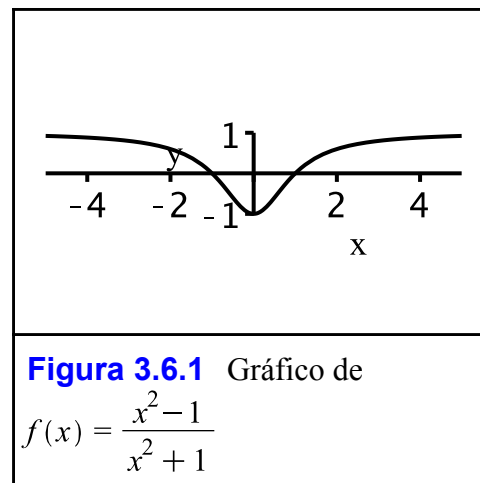


Figura 3.6.1 Gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

pelo Maple da função.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$f(x)$	-1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{45}{53}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{77}{85}$	$\frac{12}{13}$
$f(x)$	-1	-0.6\0	0	0.38	0.60	0.72	0.80	0.85	0.88	0.91	0.92

Tabela 3.6.1 Valores de $f(x)$

3.6 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do Tutorial Funções Racionais.

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.6.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico da função que esta cruza duas vezes o eixo x . As soluções de $f(x) = 0$ são soluções de $x^2 - 1 = 0$. Portanto, as interseções em x são $x = \pm 1$. A interseção em y

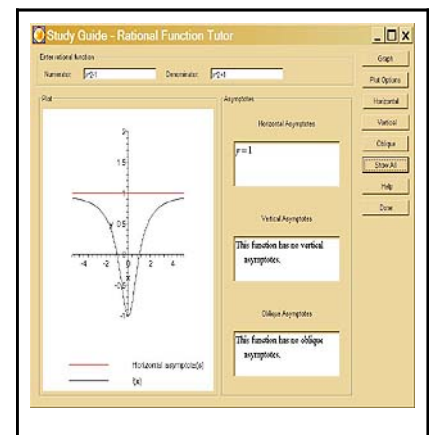


Figura 3.6.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

ocorre onde $x = 0$, de forma que é igual a $f(0) = -1$.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

▼ 3.6 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome > f

▼ Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

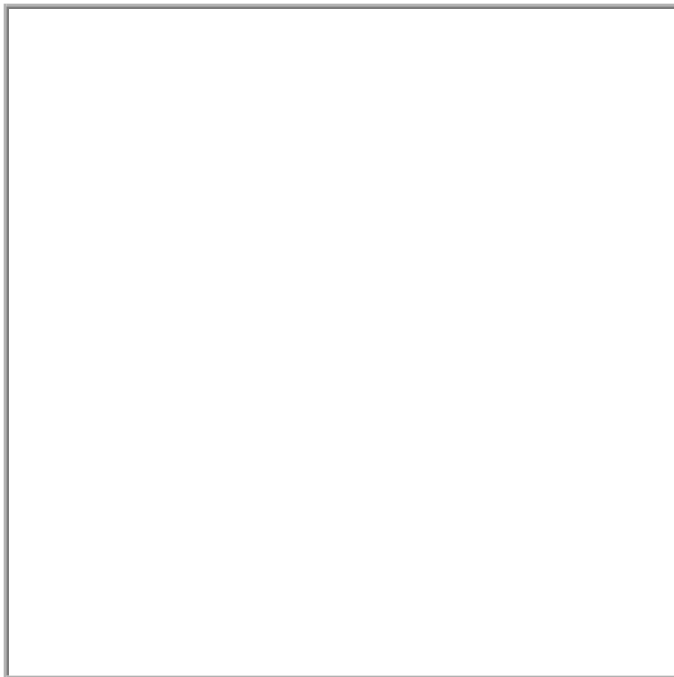
Horizontal

Forma de Pon...

Gráfico

Oblíqua

Forma Ponto ...



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Vertical



Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito

- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
Descontinuidades
Imagem:
Encontrar

3.6 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional:

$$> f := \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

aparece na Figura 3.6.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-5..5, y=-1..1, scaling=constrained, tickmarks=[7, 2])`

O gráfico de $f(x)$ cruza tanto o eixo y quanto o eixo x , de forma que existe não só uma interseção em y , encontrada pelo cálculo :

> `eval(f, x=0)`

mas também existem duas interseções em x , encontradas ao resolver-se a equação $f(x) = 0$ para x . Pelo Maple, encontra-se:

> `solve(f=0, x)`

ou seja, as duas interseções em x são $x = +1$.

A reta horizontal $y = 1$ é uma assíntota. Esta é encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão:

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por:

```
> y = limit(f, x = ∞);
y = limit(f, x = - ∞)
```

Alternativamente, $f(x)$ pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

por meio da divisão longa, implementada no Maple pelo comando quo, como segue

```
> quotient = quo(numer(f), denom(f), x, 'r');
remainder = r
```

O quociente de x^2 dividido por $x^2 + 1$, ou seja, 1, é retornado diretamente pelo comando quo (quociente). O resto obtido ao executar-se a divisão é armazenado na variável r que, neste caso, é -2 . Como o resto deve ser dividido pelo divisor, segue o resultado.

Como vimos no Problema 3.3 que $\frac{1}{x^2 + 1}$ tende a zero tanto para x grande quanto pequeno, o quociente 1 indica a assíntota horizontal.

Por fim, note que é possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal diferente para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal em ambas as extremidades.

O denominador, ou seja,

```
> d := denom(f)
```

nunca é zero, como observa-se no gráfico da Figura 3.6.3.

```
> plot(d, x = -2 .. 2, -1 .. 5)
```

Figura 3.6.3 Gráfico do denominador de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Portanto, $f(x)$ não possui assíntota vertical, uma vez que estas podem ocorrer apenas em pontos onde o denominador é zero e o numerador diferente de zero.

Problema 3.7

3.7 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ possui $-\frac{1}{2}$ como sua interseção em y , pois $f(0) = -\frac{1}{2}$. Esta não possui interseção em x porque a equação $f(x) = 0$ não possui solução.

O denominador, ou seja, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ possui dois zeros dados por $x = -1$ e $x = 2$. Como o numerador é 1, existem duas assíntotas verticais, ou seja, as retas verticais $x = -1$ e $x = 2$.

Ligeiramente à esquerda de $x = -1$, a função assume valores positivos grandes, enquanto ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores negativos com valores absolutos grandes. Estas observações são expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Ligeiramente à esquerda de $x = 2$, a função assume valores negativos com valor grande valor absoluto. Porém, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores positivos grandes. Estas observações são expressas matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Para valores absolutos grandes de x , os valores da função são positivos, embora bem próximos de zero. Esta observação é expressa matematicamente pela notação

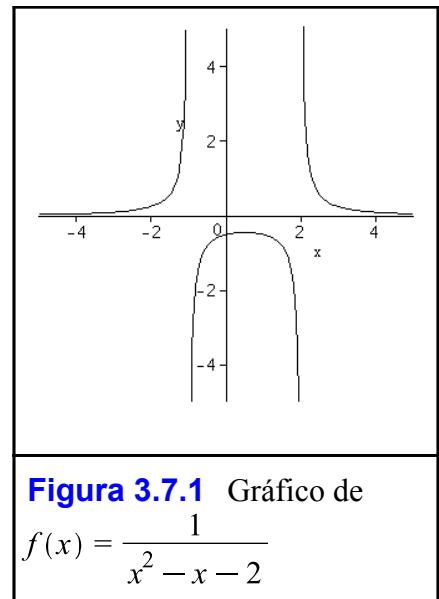
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Portanto, o eixo x é uma assíntota horizontal para a função.

Um gráfico produzido pelo Maple é mostrado na Figura 3.7.1.



3.7 - Solução via Maplet

Um gráfico da [função racional](#)

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

e as equações de quaisquer de suas [assíntotas](#) podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.7.2.

As [interseções](#) podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica evidente no gráfico da função que esta não cruza o eixo x . Sendo assim, não há interseções em x . Contudo, a interseção em y ocorre onde $x = 0$, sendo dada por $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

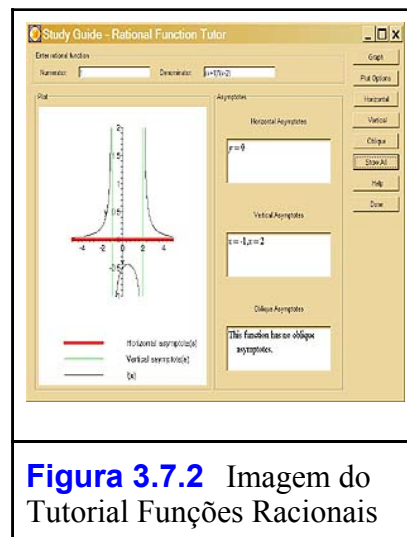


Figura 3.7.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

3.7 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

Obliqua

Forma Ponto ...

Vertical

Forma Ponto ...

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Assíntotas

Assíntotas Verticais	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Denominador • Menu de Contexto: Resolver	
Assíntotas Horizontais	
Comportamento para $x \rightarrow \infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	
Comportamento para $x \rightarrow -\infty$ • Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Construções > Limite > x > -infinito • Menu de Contexto: Calcular (de inerte)	

Gráfico

• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-1 \leq x \leq 1$ Opções: $-1 \leq y \leq 1$ Descontinuidades	Imagem: Encontrar
---	---------------------------------

3.7 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional:

> $f := \frac{1}{x^2 - x - 2}$

aparece na Figura 3.7.1. Pode ser criado com o comando:

```
> plot(f, x = -5 ..5, y = -3 ..3, discount = true)
```

O parâmetro `discount = true` no comando `plot` evita que o Maple trace retas verticais onde as assíntotas verticais normalmente aparecem. Isto é feito para reforçar a compreensão de que assíntotas verticais não são parte do gráfico de $f(x)$.

O gráfico de $f(x)$ cruza o eixo y , mas não o eixo x . Portanto, o Maple encontra uma interseção em y por:

```
> y = eval(f, x = 0)
```

A reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando `limit`, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por:

```
> y = limit(f, x = ∞);  
y = limit(f, x = - ∞)
```

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

As retas verticais $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais. Uma assíntota vertical ocorre em pontos onde o denominador de $f(x)$ torna-se zero, com o numerador diferente de zero.

Os zeros do denominador de $f(x)$ são encontrados no Maple por

```
> solve(denom(f) = 0, x)
```

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = -1$ é determinado pelos dois limites:

```
> Limit(f, x = -1, right) = limit(f, x = -1, right);  
Limit(f, x = -1, left) = limit(f, x = -1, left)
```

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = 2$ é determinado pelos limites:

```
> Limit(f, x = 2, right) = limit(f, x = 2, right);  
Limit(f, x = 2, left) = limit(f, x = 2, left)
```

Problema 3.8

3.8 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} =$

$\frac{x}{(x+1)(x-2)}$ possui 0 como interseção em y , pois $f(0) = 0$. Esta possui o número 0 como interseção em x , pois a equação $f(x) = 0$ apresenta a solução $x = 0$. Portanto, o gráfico da função passa pela origem.

O denominador, ou seja, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, possui dois zeros dados por $x = -1$ e $x = 2$. Como o denominador é diferente de zero em ambos os pontos, existem assim duas assíntotas verticais dadas pelas retas verticais $x = -1$ e $x = 2$.

Ligeiramente à esquerda de $x = -1$, a função assume valores negativos com valores absolutos altos. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores positivos grandes. Estas observações são expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$$

Ligeiramente à esquerda de $x = 2$, a função assume valores negativos com valores absolutos altos. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores positivos altos. Estas observações podem ser expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Para valores de x grandes e positivos, os valores da função são positivos, embora próximos de zero. Para valores negativos de x e com grande valor absoluto, os valores da função são negativos e, novamente, próximos de zero.

Estas observações são expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Sendo assim, o eixo x é uma assíntota horizontal para esta função.

Um gráfico produzido pelo Maple é mostrado na Figura 3.8.1.

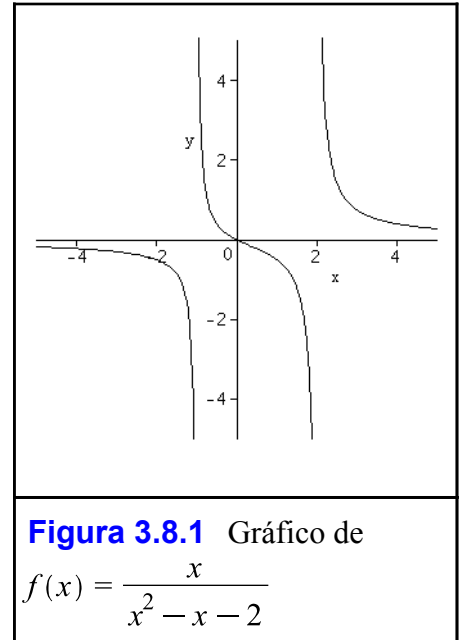


Figura 3.8.1 Gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

3.8 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.8.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica evidente no gráfico desta função que apenas uma parte do gráfico passa pela origem. Portanto, as interseções em x e y são dadas por $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

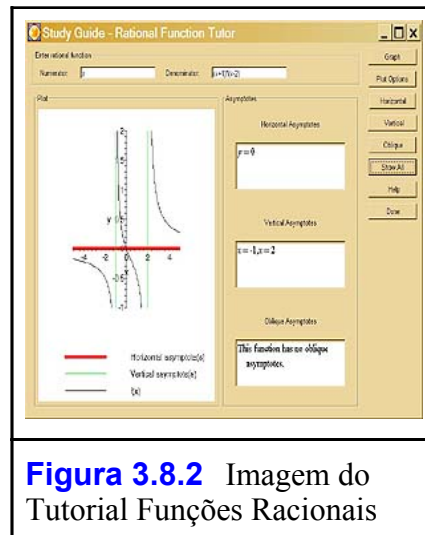


Figura 3.8.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

3.8 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

Modelo de Tarefa

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Gráfico

Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

Oblíqua

Forma Ponto ...

Vertical

Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
 - Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
Descontinuidades
- Imagem:
Encontrar

3.8 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional:

$$> f := \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

aparece na Figura 3.8.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x = -5 ..5, y = -3 ..3, discont = true)`

O parâmetro `discont = true` no comando `plot` evita que o Maple trace retas verticais onde as assíntotas verticais normalmente aparecem. Isto é feito para reforçar a compreensão de que assíntotas verticais não são parte do gráfico de $f(x)$.

O gráfico de $f(x)$ aparenta passar pela origem, uma hipótese que pode ser verificada pelo cálculo

> `y = eval(f, x = 0)`

Portanto, a origem é uma interseção em x e também em y .

A reta horizontal $y = 0$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando `limit`, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por:

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = - ∞)`

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 0$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

As retas verticais $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais. Uma assíntota vertical pode ocorrer nos pontos onde o denominador de $f(x)$ torna-se zero e o numerador é diferente de zero.

Os zeros do denominador de $f(x)$ são encontrados pelo Maple com:

> `solve(denom(f) = 0, x)`

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = -1$ é determinado pelos dois limites

> `Limit(f, x = -1, right) = limit(f, x = -1, right);`
`Limit(f, x = -1, left) = limit(f, x = -1, left)`

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = 2$ é determinado pelos dois limites

> `Limit(f, x = 2, right) = limit(f, x = 2, right);`
`Limit(f, x = 2, left) = limit(f, x = 2, left)`

Problema 3.9

3.9 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} =$

$\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$ possui 0 como interseção em y , pois $f(0) = 0$. Possui ainda zero como interseção em x , pois a equação $f(x) = 0$ possui como solução $x = 0$. Portanto, o gráfico da função passa pela origem.

O denominador, ou seja, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, possui dois zeros dados por $x = -1$ e $x = 2$. Como o numerador é diferente de zero em ambos os pontos, existem duas assíntotas verticais, ou seja, as retas verticais $x = -1$ e $x = 2$.

Ligeiramente à esquerda de $x = -1$, a função assume valores positivos altos. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores negativos com valor absoluto alto. Estas observações são expressas matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Ligeiramente à esquerda de $x = 2$, a função assume valores negativos com valores absolutos altos. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores positivos grandes. Estas observações são expressas matematicamente pela notação:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Para valores positivos de x , os valores da função tornam-se bem próximos de 1. Isto ocorre porque, para tais valores de x , a função comporta-se essencialmente como a fração $\frac{x^2}{x^2} = 1$.

Estas observações são expressas matematicamente pela notação

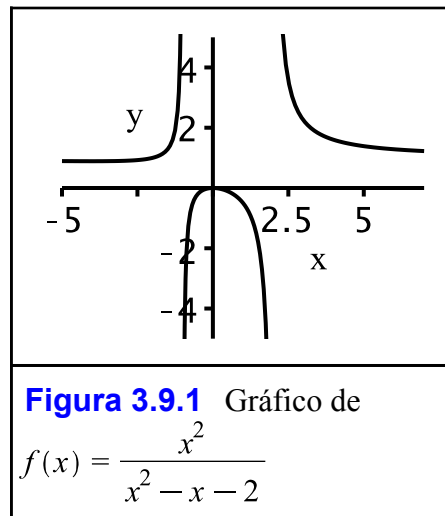
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Portanto, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal para esta função.

Um gráfico produzido pelo Maple é mostrado na Figura 3.9.1.



3.9 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial de Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.9.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas). Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica claro no gráfico desta função que apenas uma seção do gráfico desta função passa pela origem. Portanto, as interseções em x e y são $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

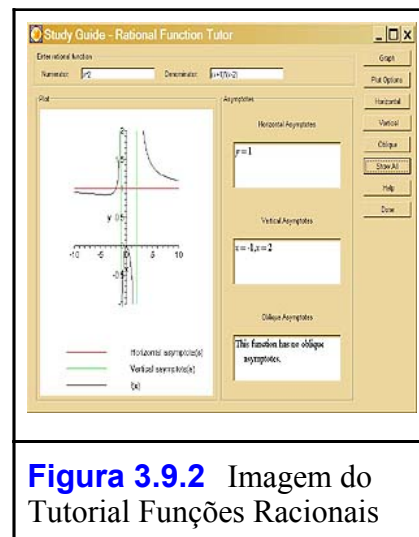


Figura 3.9.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

3.9 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome f

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

Forma de Pon...

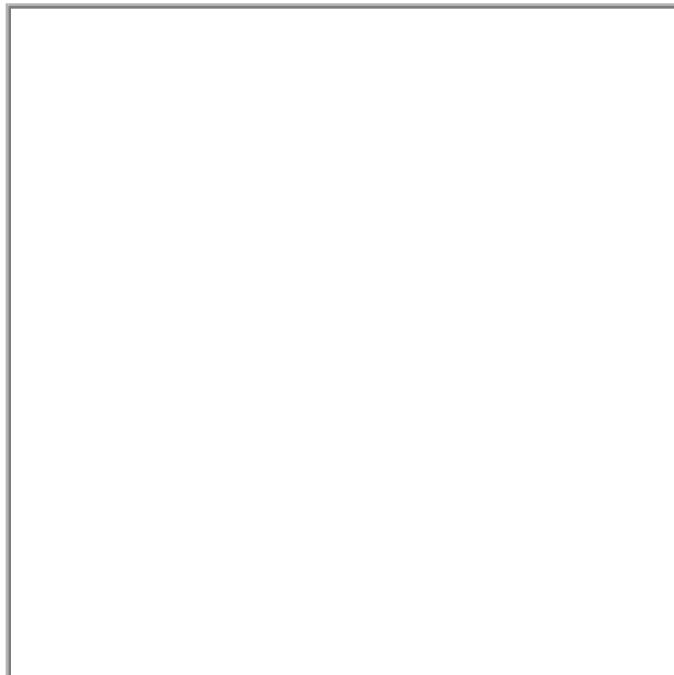
Obliqua

Forma Ponto ...

Vertical

Forma Ponto ...

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
 - Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
Descontinuidades
- Imagem:
Encontrar

3.9 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

$$> f := \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

aparece na Figura 3.9.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-5..7, y=-3..5, discont = true)`

O parâmetro `discont = true` no comando `plot` evita que o Maple trace retas verticais onde as assíntotas verticais normalmente aparecem. Isto é feito para reforçar a compreensão de que assíntotas verticais não são parte do gráfico de $f(x)$.

O gráfico de $f(x)$ aparenta passar pela origem, uma hipótese verificada pelo cálculo

> `y = eval(f, x = 0)`

Sendo assim, a origem é tanto uma interseção em x como uma interseção em y .

A reta horizontal $y = 1$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando `limit`, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por

> `y = limit(f, x = ∞);`
`y = limit(f, x = - ∞)`

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 1$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

As retas verticais $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais. Uma assíntota vertical pode ocorrer em pontos onde o denominador de $f(x)$ torna-se zero, com o numerador diferente de zero.

Os zeros do denominador de $f(x)$ são encontrados no Maple por

> `solve(denom(f) = 0, x)`

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = -1$ é determinado pelos dois limites :

> `Limit(f, x = -1, right) = limit(f, x = -1, right);`
`Limit(f, x = -1, left) = limit(f, x = -1, left)`

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = 2$ é determinado pelos dois limites :

> $\text{Limit}(f, x=2, \text{right}) = \text{limit}(f, x=2, \text{right});$
 $\text{Limit}(f, x=2, \text{left}) = \text{limit}(f, x=2, \text{left})$

Problema 3.10

3.10 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2 - 9}{(x + 1)(x - 2)}$

possui $\frac{9}{2}$ como interseção em y , pois $f(0) = \frac{9}{2}$. Esta possui ainda $x = -3$ e $x = 3$ como interseções em x , pois a equação $f(x) = 0$ possui as soluções $x = \pm 3$.

O denominador, ou seja, $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, possui dois zeros dados por $x = -1$ e $x = 2$. Como o numerador é diferente de zero em ambos os pontos, existem então duas assíntotas verticais dadas pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

Ligeiramente à esquerda de $x = -1$, a função assume valores negativos com valor absoluto alto. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores positivos altos. Estas observações são expressas matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$$

Ligeiramente à esquerda de $x = 2$, a função assume valores positivos altos. Mas, ligeiramente à direita desta assíntota, a função assume valores negativos com alto valor absoluto. Estas observações são expressas matematicamente pela notação

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$$

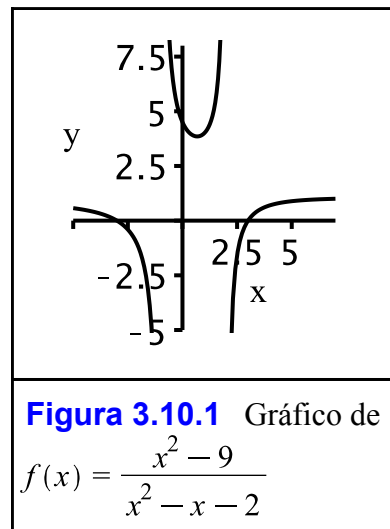
e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

Para valores de x positivos e grandes, os valores da função tornam-se próximos de 1. Isto ocorre porque para tais valores de x a função comporta-se essencialmente como a fração

$$\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Estas observações são expressas matematicamente pela notação



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Portanto, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal para esta função.

Um gráfico produzido pelo Maple é mostrado na Figura 3.10.1.

▼ 3.10 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.10.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Obliqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica evidente no gráfico desta função que esta cruza o eixo x duas vezes e cruza ainda o eixo y uma única vez. As interseções em x são as soluções da equação $f(x) = 0$ ou, de forma mais simples, $x^2 - 9 = 0$. Portanto, as interseções em x são dadas por $x = \pm 3$, enquanto as interseções por y são dadas por $f(0) = \frac{9}{2}$.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial](#)

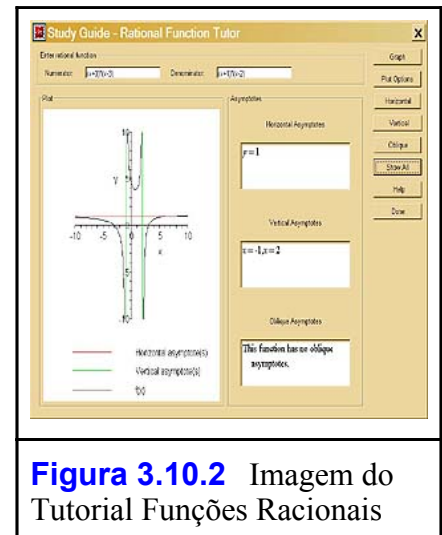


Figura 3.10.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

▼ 3.10 - Solução Interativa

- Insira a expressão para a função racional dada.
- Menu de Contexto: Associe a um Nome >
 f

▼ Modelo de Tarefa

Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas

Tutor Função Racional

Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

Assíntotas

Limpar Função

Assíntotas

Horizontal

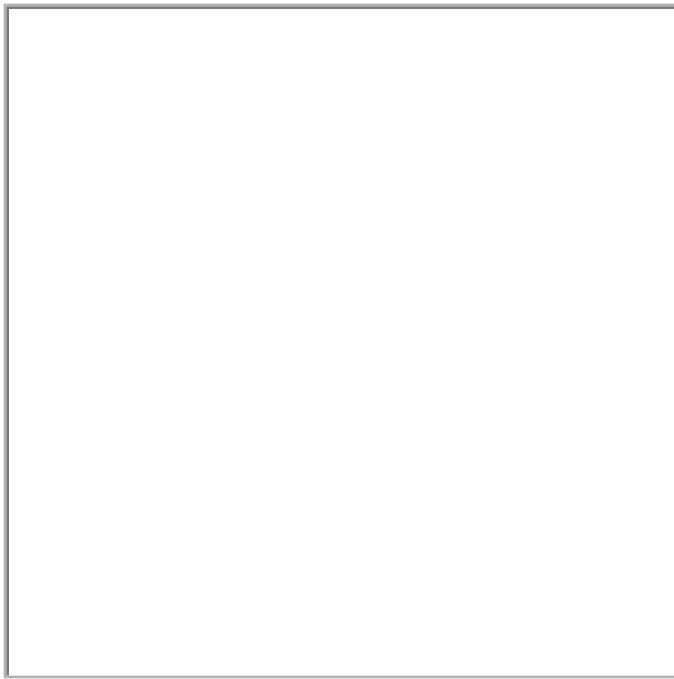
Forma de Pon...

Oblíqua

Forma Ponto ...

Vertical

Gráfico



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico



Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito

- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
 Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
 Descontinuidades

Imagem:

Encontrar

3.10 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

$$> f := \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2}$$

aparece na Figura 3.10.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-5..7, y=-3..7, discontinuity=true)`

O parâmetro `discontinuity = true` no comando `plot` evita que o Maple trace retas verticais onde as assíntotas verticais normalmente aparecem. Isto é feito para reforçar a compreensão de que assíntotas verticais não são parte do gráfico de $f(x)$.

O gráfico de $f(x)$ cruza ambos os eixos. Sendo assim, a interseção em y é dada por

> `y = eval(f, x=0)`

enquanto as interseções em x são dadas por $x = c$, onde c é qualquer dos números a seguir

> `solve(f=0, x)`

A reta horizontal $y = 1$ é uma assíntota horizontal. Esta pode ser encontrada formulando-se (e respondendo-se) à questão

"De que valor finito aproxima-se $f(x)$ à medida em que x move-se para a esquerda ou direita do eixo numérico?"

A forma matemática exata para se apresentar e responder a tal questão é através do conceito de limite. O Maple o implementa pelo comando limit, que usaremos neste capítulo. Sendo assim, a assíntota horizontal pode ser encontrada por

> $y = \text{limit}(f, x = \infty);$
 $y = \text{limit}(f, x = -\infty)$

É possível que $f(x)$ possua uma assíntota horizontal para x grande e outra assíntota horizontal para x pequeno. Neste caso, a reta $y = 1$ é a assíntota horizontal para ambas as extremidades.

As retas verticais $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais. Uma assíntota vertical pode ocorrer em pontos onde o denominador de $f(x)$ torna-se zero, com o numerador diferente de zero.

Os zeros do denominador de $f(x)$ são encontrados pelo Maple com:

> $\text{solve}(\text{denom}(f) = 0, x)$

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = -1$ é determinado pelos dois limites :

> $\text{Limit}(f, x = -1, \text{right}) = \text{limit}(f, x = -1, \text{right});$
 $\text{Limit}(f, x = -1, \text{left}) = \text{limit}(f, x = -1, \text{left})$

O comportamento de $f(x)$ próximo de $x = 2$ é determinado pelos dois limites :

> $\text{Limit}(f, x = 2, \text{right}) = \text{limit}(f, x = 2, \text{right});$
 $\text{Limit}(f, x = 2, \text{left}) = \text{limit}(f, x = 2, \text{left})$

Problema 3.11

3.11 - Solução Matemática

A função racional $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ possui $y = 0$ como interseção em y , pois $f(0) = 0$. Além disso, possui $x = 0$ como interseção em x , pois $x^3 = 0$ implica em $x = 0$.

Neste caso, não existe nem assíntota horizontal e nem vertical. Contudo, há uma assíntota oblíqua (inclinada) dada por $y = x$. A equação para esta assíntota oblíqua pode ser encontrada por meio da divisão longa, representada na Tabela 3.11.1.

x	
$x^2 + 1$	x^3
$x^3 + x$	
$\square$	
$-x$	

Tabela 3.11.1
Divisão longa

Conseqüentemente, pode-se escrever:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

A partir desta representação, segue que, à medida em que $|x|$ aumenta, a parte fracionária (isto é, o resto) tende a zero. Portanto, a função aproxima-se da assíntota oblíqua $y = x$.

Existem outras técnicas do cálculo que podem ser usadas para determinar-se a assíntota oblíqua. Porém, estariam estas além do escopo da presente discussão.

Terminaremos esta discussão com um gráfico produzido pelo Maple mostrado na Figura 3.11.1.

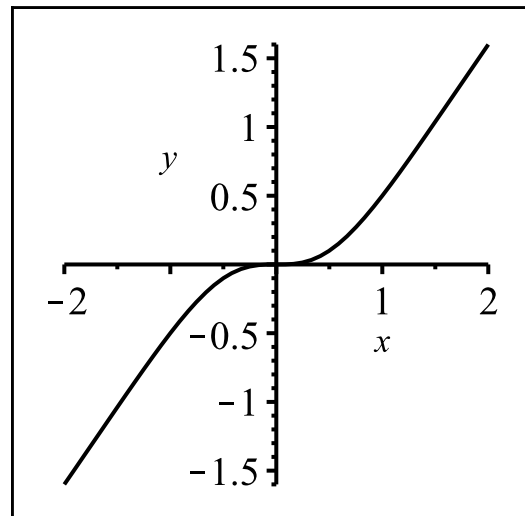


Figura 3.11.1 Gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

3.11 - Solução via Maplet

Um gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

e as equações de quaisquer de suas assíntotas podem ser encontrados por meio do [Tutorial Funções Racionais](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 3.11.2.

As interseções podem ser deduzidas a partir do gráfico e/ou da própria função.

Para usar este tutorial, deve-se inserir o numerador e o denominador da função racional nas caixas apropriadas.

O botão **Gráfico** fornece um gráfico de $f(x)$. Ao pressionar-se o botão **Horizontal**, são inseridas no gráfico as assíntotas horizontais (em linhas vermelhas). Ao pressionar-se o botão **Vertical**, são adicionadas ao gráfico quaisquer assíntotas verticais (em linhas verdes). Ao pressionar-se o botão **Oblíqua** são adicionadas ao gráfico as assíntotas oblíquas (em linhas azuis). (Estas ações não são cumulativas. Ao pressionar-se o botão **Mostrar todas** são inseridas todas as possíveis assíntotas ao gráfico).

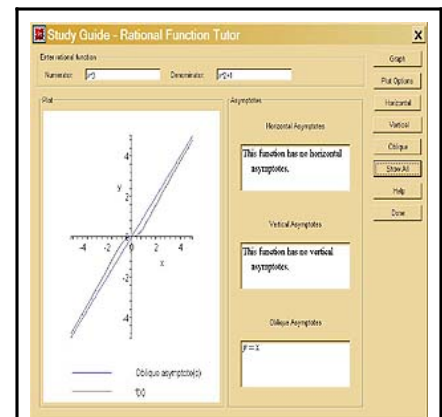


Figura 3.11.2 Imagem do Tutorial Funções Racionais

Assíntotas coincidentes com um dos eixos são traçadas em uma linha mais grossa para que possam ser vistas no gráfico.

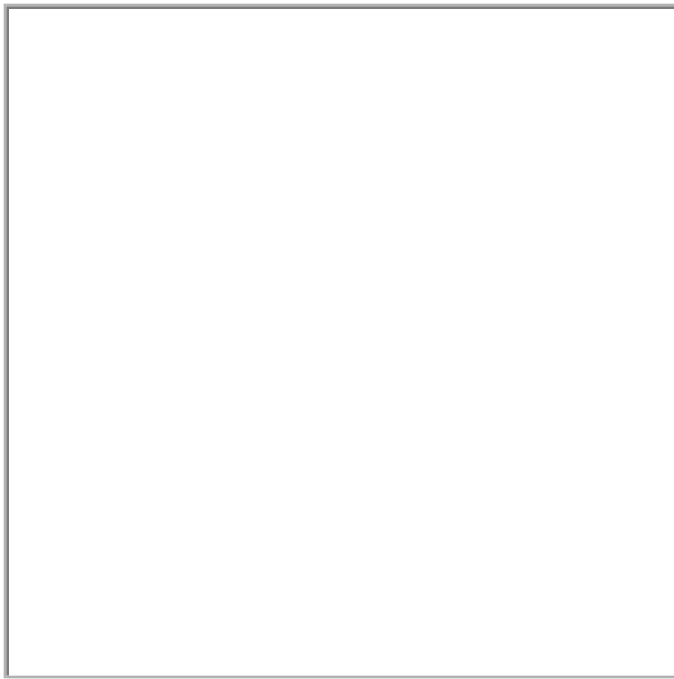
Além de modificarem o gráfico, os botões para as assíntotas apresentam as equações das respectivas assíntotas.

Fica evidente no gráfico desta função que esta passa pela origem. Portanto, as interseções em x e y são $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Para iniciar o **Tutorial Funções Racionais**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Funções Racionais](#).

▼ 3.11 - Solução Interativa

• Insira a expressão para a função racional dada. • Menu de Contexto: Associe a um Nome > f							
▼ Modelo de Tarefa Ferramentas > Tarefas > Pesquisar: Álgebra > Função Racional - Gráfico e Assíntotas <table border="1"><thead><tr><th colspan="2" data-bbox="350 1119 1466 1192">Tutor Função Racional</th></tr></thead><tbody><tr><td data-bbox="350 1192 1065 1717"> Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$: Assíntotas Limpar Função </td><td data-bbox="1065 1192 1466 1717"> Assíntotas Horizontal Forma de Pon... </td></tr><tr><td data-bbox="350 1717 1065 1948"> Gráfico </td><td data-bbox="1065 1717 1466 1948"> Oblíqua </td></tr></tbody></table>		Tutor Função Racional		Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$: Assíntotas Limpar Função	Assíntotas Horizontal Forma de Pon...	Gráfico	Oblíqua
Tutor Função Racional							
Insira uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$: Assíntotas Limpar Função	Assíntotas Horizontal Forma de Pon...						
Gráfico	Oblíqua						



Tutor Função Racional

Limpar Gráfico



Forma Ponto ...

Vertical



Forma Ponto ...

Assíntotas

Assíntotas Verticais

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto: Denominador
- Menu de Contexto: Resolver

Assíntotas Horizontais

Comportamento para $x \rightarrow \infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > infinito
- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Comportamento para $x \rightarrow -\infty$

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Construções > Limite > x > -infinito

- Menu de Contexto: Calcular (de inerte)

Assíntotas Oblíquas

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
- Conversões > Frações Parciais > x

Gráfico

- Digite f e pressione a tecla Enter.
 - Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
 $-1 \leq x \leq 1$
Opções:
 $-1 \leq y \leq 1$
Descontinuidades
- Imagem:
Encontrar

3.11 - Solução via Comandos do Maple

Um gráfico da função racional

$$> f := \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

aparece na Figura 3.11.1. Pode ser criado com o comando:

> `plot(f, x=-2..2, y=-2..2)`

O gráfico de $f(x)$ passa pela origem. Sendo assim a interseção em y é dada por

> `y = eval(f, x = 0)`

e a interseção em x é dada por $x = 0$.

Neste caso, não existe nem assíntota horizontal e nem vertical. Contudo, existe uma assíntota oblíqua (ou inclinada), encontrada algebricamente pela divisão longa do denominador pelo numerador. No Maple, este cálculo é implementado por meio do comando quo (quociente). O quociente da divisão longa é dado por

> `quo(x^3, x^2 + 1, x, 'r')`

e o resto é dado por:

> r

Portanto, pode-se escrever a função $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

A partir desta representação, tem-se que, à medida em que $|x|$ aumenta, a parte fracionária (isto é, o resto) tende a zero. Sendo assim, a função aproxima-se da assíntota oblíqua $y = x$.

O Maple possui outras ferramentas de cálculo que também poderiam ser usadas para determinar-se a assíntota oblíqua. Porém, isto encontra-se fora do escopo da presente discussão.

Exercícios - Capítulo 3

Para as funções racionais dadas nos exercícios 3.1 - 3.15, esboçar um gráfico e determinar as equações de todas as assíntotas, tanto horizontais como verticais. Além disso, determinar as interseções em y e x .

3.1. $f(x) = \frac{3}{2x + 1}$

3.2. $f(x) = \frac{2x}{3x - 4}$

3.3. $f(x) = \frac{5x + 2}{4x + 3}$

3.4. $f(x) = \frac{3}{2x^2 + x - 1}$

3.5. $f(x) = \frac{3x + 7}{4x^2 - 11x + 6}$

3.6. $f(x) = \frac{8x^2 + 6x - 9}{3x^2 + 11x + 6}$

3.7. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 20}{x^2 - x - 2}$

3.8. $f(x) = \frac{5}{x^2 + 6x + 9}$

$$3.9. f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 13}$$

$$3.10. f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 8x + 16}$$

$$3.11. f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 8x + 17}$$

$$3.12. f(x) = \frac{2x^2 - x - 15}{x^2 + 2x + 1}$$

$$3.13. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 2x + 10}$$

$$3.14. f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 6x + 18}$$

$$3.15. f(x) = \frac{x^2 + 2x + 8}{x^2 + 10x + 25}$$



SOLUÇÕES INTELIGENTES PARA FAZER MATEMÁTICA

www.aprendanet.com.br - vendas@aprendanet.com.br

Tel.: 24-2231-3549 - Fax.: 24-2237-0625

